

УДК 621.372.512

О дифракции Френеля, ближней зоне и мнимой области

(Продолжение. Первую часть читайте в «Вестнике связи» № 1/2022)

Во второй части статьи продолжим рассматривать диаграмму направленности линейной антенны в области мнимых углов, которая описывает дифракцию Френеля. Для анализа поля антенны вновь используется применяемый в оптике метод зон Френеля.

И. Е. БУЙВАЛОВ,
начальник отдела
ОАО «АЛЕВКУРП»

Для линейной синфазной антенны $A(z) = 1$, $\Phi(z) = 0$ из (1.1) получим: видеоимпульса единичной амплитуды $U(t) = 1$ длительностью $\tau_{и}$ [2].

$$|f_c(\theta)| = L \left| \frac{\sin\left(\frac{L}{2} k \cos \theta\right)}{\frac{L}{2} k \cos \theta} \right|, \quad (2.1)$$

$$|f_c(\omega_z)| = L \left| \frac{\sin\left(\frac{L}{2} \omega_z\right)}{\frac{L}{2} \omega_z} \right|. \quad (2.2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны.

Функция $|f_c(\theta)|$ является периодической с периодом равным π . Графики нормированных функций

$|F_c(\theta)| = \frac{1}{L} |f_c(\theta)|$ для $L = 3\lambda$ и $L = 3,5\lambda$ в си-

стеме координат функции $|F_c(\theta, \phi)|$ изображены на рис. 2.1.

Введение новой переменной $\omega_z = k \cos \theta$, называемой пространственной частотой [1], приводит (2.1) к угловому спектру поля антенны (2.2), аналогичному спектральной плотности амплитуд

Как известно, угловой спектр поля антенны является преобразованием Фурье от амплитудно-фазового распределения на антенне $A(z)e^{i\Phi(z)}$, где

координата z элемента антенны dz аналогична времени t для видеоимпульса. График нормированного

углового спектра $|F_c(\omega_z)| = \frac{1}{L} |f_c(\omega_z)|$ для антенны

с $A(z) = 1$, $\Phi(z) = 0$ и $L = 3\lambda$ изображен на рисунке 2.2. В отличие от спектральной плотности амплитуд видеоимпульса, ввиду того что $|\cos \theta| \leq 1$, область определения функции $|f_c(\omega_z)|$ ограничена

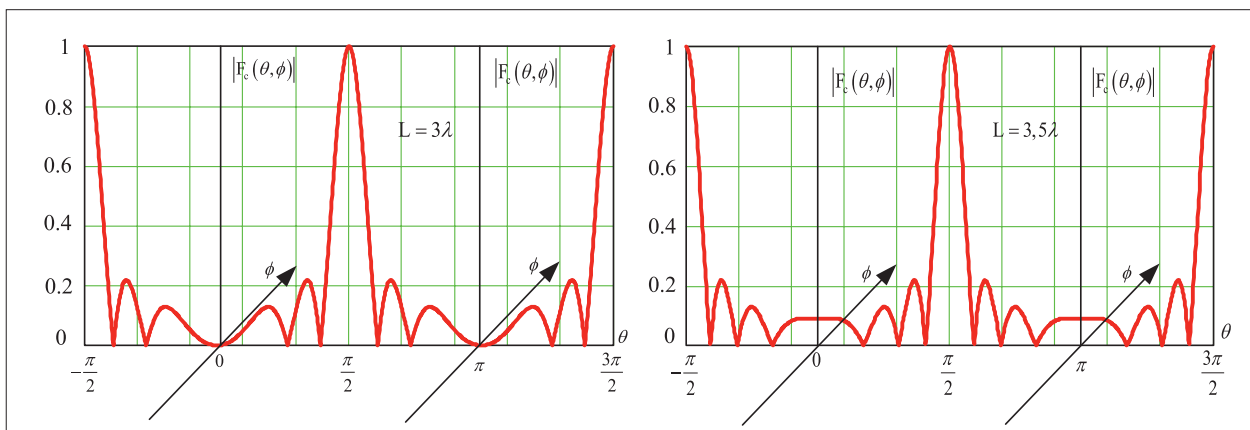


Рисунок 2.1 – Нормированные амплитудные диаграммы направленности для $L = 3\lambda$ и $L = 3,5\lambda$

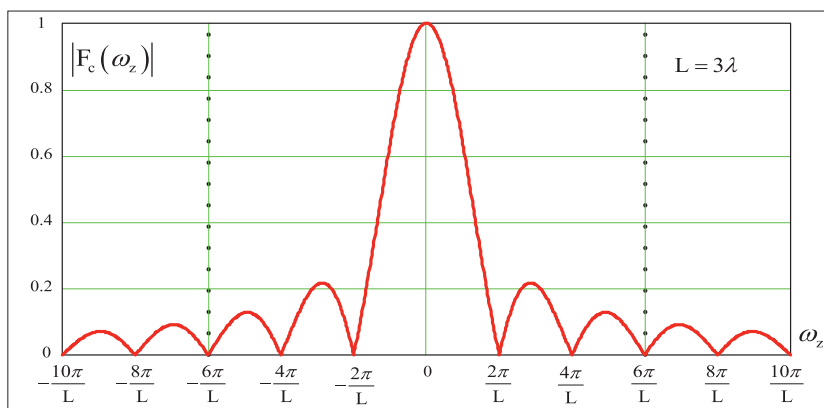


Рисунок 2.2 – Нормированный угловой спектр

пространственными частотами $|\omega_z| \leq 2\pi/\lambda$. Области пространственных частот $[-2\pi/\lambda; 2\pi/\lambda]$ соответствует область изменения $\theta [0; \pi]$, которую по аналогии [3] следует назвать действительной, или видимой областью (рис. 2.1). Аналогично области пространственных частот $2\pi/\lambda < \omega_z < -2\pi/\lambda$ соответствует область мнимых углов, или невидимая область. На рис. 2.2 пунктирными линиями нанесены границы углового спектра, соответствующие границам действительной и мнимой областей для $L = 3\lambda$, $|\omega_z| \leq 2\pi/\lambda = 2\pi/(L/3) = 6\pi/L$.

Для существования преобразования Фурье, как известно, должен сходиться интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |A(z)| dz < \infty$

$$\left(\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(z) e^{i\Phi(z)} e^{ikz \cos \theta} dz \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(z)| dz \right), \text{ что вы-}$$

полняется, и имеет место лемма Римана – Лебега

$$|f_c(\theta)| = \left| \int_0^L A(z) e^{i\Phi(z)} e^{ikz \cos \theta} dz \right| \rightarrow 0 \quad \text{п р и}$$

$k \cos \theta = \omega_z \rightarrow \infty$ [4]. То есть на бесконечности интеграл должен стремиться к нулю. Для расширения области определения функции $|f_c(\omega_z)|$, начиная со значений $\theta = 0$ ($\theta = \pi$), осуществим переход к мнимой переменной $i\phi$. Как известно, при замене вещественной переменной на мнимую тригонометрические функции формально переходят в гиперболические и наоборот. В результате пространственная частота и модуль множителя системы от мнимого угла $i\phi$ запишутся $\omega_z = k \cos(i\phi) = k \operatorname{ch}(\phi)$,

$$|f_c(\phi)| = L \frac{\left| \sin\left(\frac{L}{2} k \operatorname{ch} \phi\right) \right|}{\left| \frac{L}{2} k \operatorname{ch} \phi \right|}. \quad (2.3)$$

Аналогично спектральной плотности видеоимпульса угловой спектр поля антенны физически существует одновременно на всех пространственных частотах, значит, и функции $|f_c(\theta)|$ и $|f_c(\phi)|$ существуют одновременно. Функцию (2.3) следует рассматривать как мнимую, а (2.1) – как вещественную часть комплекснозначной функции [4]

$$|f_c(\theta, \phi)| = |f_c(\theta)| + i |f_c(\phi)|$$

равносильной сумме двух функций действительных переменных $|f_c(\theta)|$

и $|f_c(\phi)|$. В точке перехода от $|f_c(\theta)|$ к $|f_c(\phi)|$

функция $|f_c(\theta, \phi)|$ является непрерывной

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} |f_c(\theta)| = \lim_{\phi \rightarrow 0} |f_c(\phi)|. \text{ Введение функции}$$

$|f_c(\theta, \phi)|$ обеспечивает существование пространственного спектра $|f_c(\omega_z)|$ на всей оси пространственных частот.

Графики нормированной функции $|F_c(\phi)|$ для $L = 3\lambda$ и $L = 3,5\lambda$ показаны на рис. 2.3.

Как видно из графиков, при $\phi = 0$, $L = 3\lambda$ и $L = 3,5\lambda$ $|F_c(\phi)|$ имеет ноль и максимум соответственно. Покажем, что $|F_c(\phi)|$ описывает дифракцию Френеля.

Значения ϕ при которых $|F_c(\phi)| = 0$, можно найти из уравнения $\frac{L}{2} k \operatorname{ch} \phi = \pm p\pi$, где $k = 2\pi/\lambda$,

$p = 1, 2, 3, \dots$ – номер нуля

$$\begin{aligned} L/(\lambda/2) \operatorname{ch} \phi &= \pm 2p \\ \operatorname{ch} \phi &= \pm 2p/n, \\ \phi &= \pm \operatorname{Arch}(2p/n), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $n = L/(\lambda/2)$ – количество зон Френеля (см. часть 1 статьи в № 1/2022), укладываемых на антенне при $\phi = 0$.

Нули функции $|F_c(\theta)|$ рассчитываются по аналогичной формуле и можно записать

$$\begin{cases} \theta = \arccos(\pm 2p/n), \text{ для } 2p \leq n \\ \phi = \pm \operatorname{Arch}(2p/n), \text{ для } 2p \geq n \\ p = 1, 2, 3, \dots, n = L/(\lambda/2) \end{cases} \quad (2.5)$$

Если для угла ϕ в (2.5) условие $2p \geq n$ не выполняется, то угол ϕ становится мнимым, функция

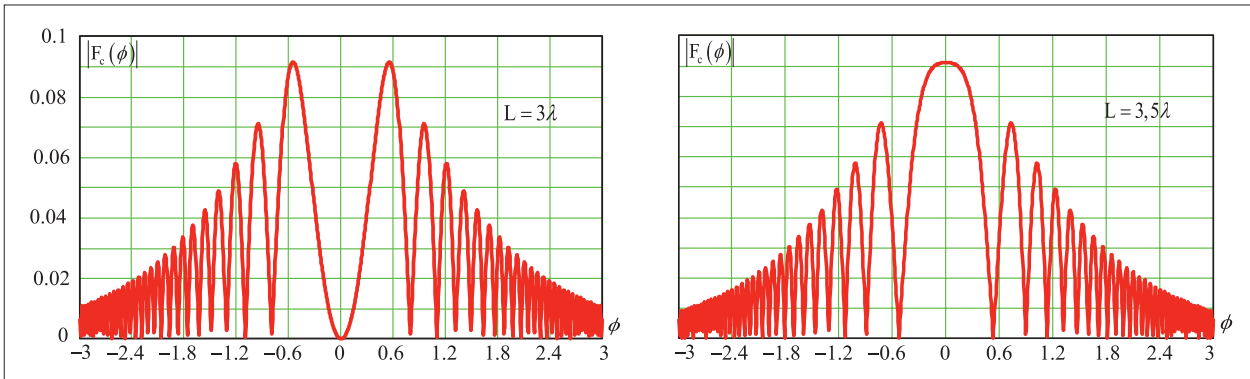


Рисунок 2.3 – Нормированные амплитудные диаграммы направленности от мнимого угла для $L = 3\lambda$ и $L = 3,5\lambda$

$\text{ch}\phi$ переходит в функцию $\cos\theta$, а функция $|F_c(\phi)|$ – в функцию $|F_c(\theta)|$.

Положения максимумов $|F_c(\phi)|$ приближенно соответствуют точкам, в которых числитель выражения (2.3) имеет максимум, то есть находятся примерно посередине между направлениями нулевого излучения. Соответствующие значения ϕ можно найти из уравнения $\frac{L}{2}k \cdot \text{ch}\phi = \pm \left(\frac{2p+1}{2}\right)\pi$, $k = 2\pi/\lambda$, $p = 1, 2, 3, \dots$ – номер максимума

$$\begin{aligned} L/(\lambda/2) \cdot \text{ch}\phi &= \pm(2p+1) \\ \text{ch}\phi &= \pm \left(\frac{2p+1}{n}\right), \quad (2.6) \\ \phi &= \pm \text{Arch}\left(\frac{2p+1}{n}\right), \end{aligned}$$

где $n = L/(\lambda/2)$ – количество зон Френеля, укладываемых на антенне при $\phi = 0$.

Максимумы функции $|F_c(\theta)|$ рассчитываются по аналогичной формуле и можно записать

$$\begin{cases} \theta = \arccos\left(\pm \frac{2p+1}{n}\right), \text{ для } 2p+1 \leq n \\ \phi = \pm \text{Arch}\left(\frac{2p+1}{n}\right), \text{ для } 2p+1 \geq n \end{cases} \quad (2.7)$$

$$p = 1, 2, 3, \dots, n = L/(\lambda/2).$$

Чтобы угол ϕ был действительной величиной должно выполняться условие $2p+1 \geq n$.

Из выражений (2.4, 2.6) видно, что при $\phi = 0$ и четном количестве полуволн напряженность поля в точке P будет равна нулю, при нечетном количестве полуволн – максимуму. Аналогичная картина наблюдается при дифракции Френеля на отверстии в экране, где также чередуются нули и максимумы интенсивности при четном и нечетном количестве открытых зон Френеля.

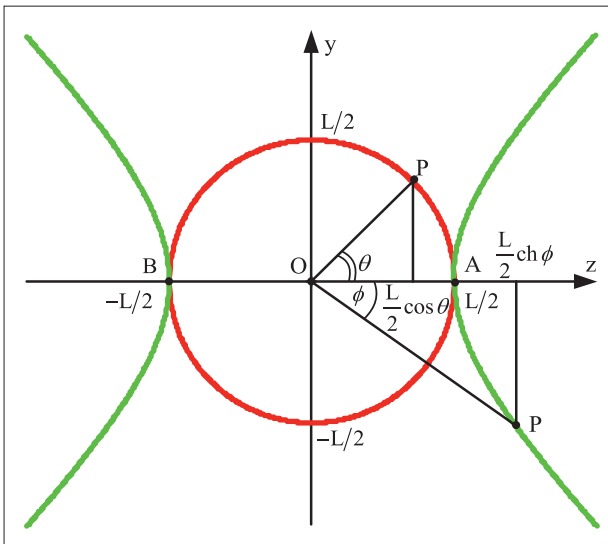


Рисунок 2.4 – Траектория перемещения точки наблюдения P

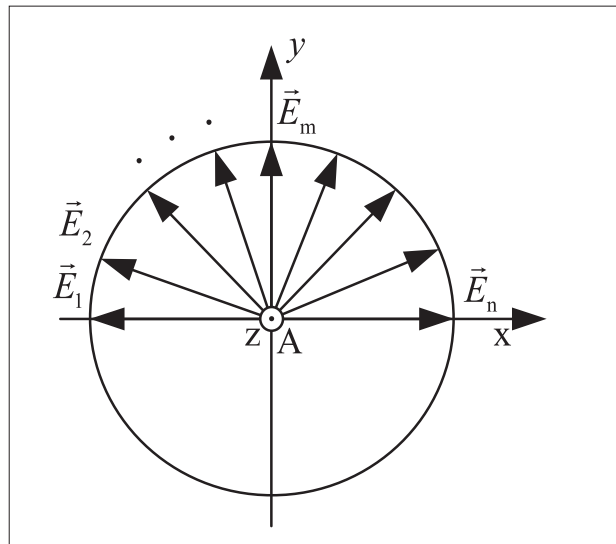


Рисунок 2.5 – Векторное суммирование полей в точке наблюдения

Рассмотрим, что происходит физически, когда $\theta = \phi = 0$. Для функции $|F_c(\theta)|$ внутреннюю функцию от угла «обхода» θ $z(\theta) = \frac{L}{2} \cos \theta$ можно интерпретировать как проекцию точки Р, лежащей на окружности радиусом $L/2$, на ось Oz (рис. 2.4). Умножение координаты $z(\theta)$ на волновое число $k = 2\pi/\lambda$ дает электрическую длину координаты $z(\theta)$ точки Р, или так называемую приведенную угловую координату $\psi = \pi \frac{L}{\lambda} \cos \theta$ [3].

Примечание. Расстояние r_0 до точки наблюдения в дальней зоне в анализе не участвует, так как является постоянной величиной $r_0 = \text{const}$ и поэтому может быть вынесено за знак интеграла (1.1).

При изменении угла «обхода» θ в видимой области в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$ точка Р перемещается по окружности радиуса $L/2$. Когда точка Р будет находиться на оси Oz, в точке А ($\theta = \phi = 0$), произойдет переход от $|F_c(\theta)|$ к $|F_c(\phi)|$. Траектория движения при замене действительного аргумента на мнимый с окружности перейдет на равностороннюю гиперболу, и текущая координата точки Р

по оси Oz станет $z(\phi) = \frac{L}{2} \text{ch} \phi$.

Примечание. Действительно, параметрическое уравнение единичной окружности при замене действительного аргумента на мнимый переходит в параметрическое уравнение равносторонней гиперболы

$$\begin{cases} z = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \text{ch} \phi \\ y = i \cdot \text{sh} \phi \end{cases},$$

$$(L/2)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = (L/2)^2 (\text{ch}^2 \phi - \text{sh}^2 \phi).$$

Асимптотами, к которым ветви равносторонней гиперболы приближаются при удалении $z(\phi)$ в бесконечность, являются прямые $y = z$ и $y = -z$, проходящие через точку О под углом $\phi = \pi/4$. К этому значению асимптотически приближается ϕ при $\text{ch} \phi \rightarrow \infty$.

Для синфазной линейной антенны с равномерным амплитудным распределением все элементы антенны излучают парциальные поля $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ с одинаковой амплитудой и фазой. За счет разности хода электромагнитные волны от этих элементов приходят в точку А со своими фазами $\Phi_n = kZ_n$, где суммируются по правилам векторного суммирования. На рисунке 2.5 изображены векторы парциальных полей для антенны длиной $\lambda/2$ в точке А, вектор \vec{E}_n соответствует точке А, вектор \vec{E}_1 – точке В. Результирующий вектор \vec{E}_Σ будет совпадать с \vec{E}_m . Несложно заметить, что проекции векторов

в направлении Оу описываются функцией $\sin(x)$ и векторное суммирование можно заменить скалярным с учетом знака функции.

Для антенны длиной $L = \lambda$ из-за разности хода $\lambda/2$ парциальные поля элементарных излучателей одной половины антенны вычтутся из парциальных полей другой половины. В результате поле в точке А будет равно нулю. Сказанное справедливо для антенны любой длины при четном количестве зон Френеля $L = 2n(\lambda/2)$. Если количество зон Френеля нечетно $L = (2n+1)(\lambda/2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, то поля четных зон вычтутся, а результирующее поле в точке А создаст оставшаяся зона.

Обычно антенна представляет собой видоизмененный отрезок линии передачи, имеющий на конце короткое замыкание, холостой ход либо согласованную нагрузку. Передаточные свойства отрезка длинной линии с потерями описываются уравнениями четырехполосника в гиперболических функциях [2]. Из уравнений следует, что нормированные передаточные функции отрезка линии передачи по напряжению при холостом ходе на выходе и по току при коротком замыкании на выходе, аналогичны и соответственно равны: $\hat{K}_U(1) = 1/A_{11} = 1/\text{ch} \gamma = U_2/U_1$ и $\hat{K}_I = 1/A_{22} = 1/\text{ch} \gamma = I_2/I_1$,

где U_2 – напряжение на выходе линии, U_1 – напряжение на входе линии, I_2 – ток на выходе линии, I_1 – ток на входе линии, $\gamma = a + ib$ – рабочая постоянная передачи, $a = \alpha l$ – рабочее затухание, α [дБ/м] – погонное затухание отрезка линии, в данном случае обусловленное излучением, $b = \beta l$ – рабочая фаза, β [рад/м] = $2\pi/\lambda_B$ – фазовая постоянная, l – длина отрезка линии, λ_B – длина волны в линии.

Раскрывая γ , получим $\text{ch} \gamma = \text{ch}(\alpha l + i\beta l) = \text{ch} \alpha l \cdot \cos \beta l + i \cdot \text{sh} \alpha l \cdot \sin \beta l$, откуда модуль нормированной передаточной функции отрезка линии по напряжению (току) равен

$$|\hat{K}_{U,I}| = \frac{1}{|\text{ch} \gamma|} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 \alpha l - \sin^2 \beta l}}.$$

Графики функции $|F_c(\phi)|$ на рисунке 2.3, в соответствии с леммой Римана – Лебега, носят затухающий характер. Поскольку тепловые потери в интеграле 1.1 не учитывались, затухание может быть вызвано только интерференцией между парциальными волнами, что аналогично затуханию местных полей в идеальном волноводе, для которых $\beta = 0$ [5]. В результате получим $|\hat{K}_{U,I}(1)| = 1/\text{ch} \alpha l$. Отрезок линии, нагруженный на согласованную нагрузку, эквивалентен бесконечной линии, передаточная функция которой аналогична двум предыдущим при любых

граничных условия на выходе. В самом деле, при $l \rightarrow \infty$

$$|\operatorname{ch} \gamma| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha l \cdot \cos^2 \beta l + i \cdot \operatorname{ch}^2 \alpha l \cdot \sin^2 \beta l} = \operatorname{ch} \alpha l.$$

Так как $|F_c(\theta)|$ описывает распределение в зоне Фраунгофера амплитуды активного поля от действительного угла θ , то $|F_c(\phi)|$ как мнимая часть комплекснозначной функции $|F_c(\theta, \phi)|$ описывает распределение амплитуды реактивного поля от мнимого угла ϕ в области Френеля.

С увеличением длины антенны значения максимумов функции $|F_c(\phi)|$ уменьшаются. Это связано с тем, что при одинаковой подводимой мощности и увеличении длины антенны снижается мощность, приходящейся на одну зону.

При движении по гиперболе вправо точка Р удаляется от антенны. Одновременно антенна смещается в область зон с большим номером, исчезают первые зоны Френеля, «накрывающие» антенну, и появляются дальние, угловая величина и количество которых уменьшаются, а их ширина стремится к $\lambda/2$. Сумма зон с одинаковой шириной и противоположными знаками даст ноль функции $F_c(\beta)$ и локальный максимум, если сумма размеров зон с положительным и отрицательным знаком не равны, что и наблюдается на графиках.

Максимальное значение функции $|F_c(\phi)|$ при $r > 0$ наблюдается при $L = \lambda |F_c(0,91)| \cong 0,217 \cdot$

Пересчитаем расстояние до дальней границы ближней зоны $r_{\max} = 0,75\lambda$ (см. ч1), в мнимый (гиперболический) угол ϕ , который затем подставим в выражение для $|F_c(\phi)|$. Расстояние r (рис. 1.2) может

быть рассчитано по формуле $r = \frac{L}{2} \operatorname{sh} \phi$. Откуда

$$\text{получим } \phi = \operatorname{Arsh}(2r/L) = \operatorname{Arsh}(6/4) \cong 1,1947$$

$$\text{и } |F_c(1,1947)| \cong 0,1.$$

Как видим, величиной реактивного поля на расстоянии от антенны $r_{\max} = 0,75\lambda$ можно пренебречь, так как оно значительно ослаблено по сравнению с полем дальней зоны, и принять за дальнюю границу ближней зоны антенны расстояние, равное $r_{\text{БЗ}} = 0,75\lambda$.

Заключение.

Дальняя граница области дифракции Френеля $r_{\max} = L^2/\lambda - \lambda/4$, так же как и ближняя граница дальней зоны, области дифракции Фраунгофера $r_{\min} \cong 2L^2/\lambda$ зависят от поперечных размеров антенны и длины волны.

В области мнимых углов диаграмма направленности антенны описывает распределение амплитуд реактивных полей в области Френеля.

Дальняя граница ближней зоны антенны определяется ее рабочей длиной волны и равна $r_{\text{БЗ}} = 0,75\lambda$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антенны и устройства СВЧ: учебник / Д. М. Сазонов. – М.: Высш. шк., 1988. – 432 с.
2. Теория электрических цепей: учебник для вузов / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев; под общ. ред. А. П. Курулева. – Минск: Вышэйш. шк., 2015. – 608 с.
3. Антенные системы радиоэлектронных средств: учебник / Г. В. Хохлов [и др.]; под общ. ред. Г. В. Хохлова. – М.: Воениздат, 1978. – 368 с.
4. Лекции по теории функции комплексного переменного: учебник / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М.: Наука, 1982 – 488 с.
5. Электродинамика и техника СВЧ. Часть I. Теория электромагнитного поля: курс лекций / Ю. П. Воробаев. – МВИЗРУ ПВО, 1978. – 202 с.

Получено 19.01.2022.